

Morse-Folgen mit vorgegebenem rationalem Spektrum

von

Michael Keane
aus San Antonio/Texas

1967



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41533917_0066

Morse-Folgen mit vorgegebenem
rationalem Spektrum

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Michael Keane
aus San Antonio, Texas

Als Dissertation genehmigt von der Naturwissenschaftli-
chen Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg.



Tag der mündlichen Prüfung: 22.2.1967

Dekan: Universitätsprofessor Dr. K. Brodersen

Erstberichterstatter: Universitätsprofessor Dr. K. Jacobs

Zweitberichterstatter: Universitätsprofessor Dr. H. Bauer

Einleitung

Sei Ω ein kompakter metrischer Hausdorffraum und T ein Homöomorphismus von Ω auf sich. Für jeden Punkt $a \in \Omega$ kann man die abgeschlossene Hülle Ω_a der Bahn von a unter T betrachten und die T -invarianten normierten Maße auf Ω_a untersuchen. Insbesondere kann man versuchen, für solche Maße das Spektrum von T im Hilbertraum der quadratisch-integrierbaren Funktionen über Ω_a zu bestimmen. Dabei sind von besonderem Interesse die Punkte a , für die Ω_a topologisch minimal ist und ausschließlich ein T -invariantes normiertes Maß m_a (das dann automatisch ergodisch ist) besitzt (d.h. auch maßtheoretisch minimal ist). Kakutani [3] hat für ein besonderes Paar (Ω, T) ein ganzes Kontinuum von Punkten a angegeben, für die dies der Fall ist und die Ω_a sämtlich verschieden sind. Alle diese Punkte liefern dasselbe Punktspektrum für den durch T im Raum $L^2(m_a)$ induzierten unitären Operator T_a , nämlich die Gruppe

$$\{ e^{2\pi\alpha i} : \alpha = \frac{k}{2^n}, k, n \text{ ganz}, n > 0 \}.$$

In der vorliegenden Arbeit wollen wir nun das gleiche Paar (Ω, T) wie Kakutani betrachten; wir werden zu jeder ordnungsfiniten Untergruppe des Einheitskreises einen Punkt a konstruieren, für den erstens (Ω_a, T) topologisch und maßtheoretisch minimal ist, und zweitens das einzige von Ω_a getragene normierte invariante Maß m_a als Punktspektrum gerade die vorgegebene Gruppe besitzt.

In Kapitel I werden die nötigen Begriffe und Bezeichnungen eingeführt und über die bisherigen Ergebnisse berichtet. Kapitel II enthält die Konstruktion eines Punktes a

zur Gruppe

$$\{ e^{2\pi i \alpha} : \alpha = \frac{k}{3^n}, n, k \text{ ganz}, n > 0 \}.$$

In Kapitel III wird die allgemeine Konstruktion durchgeführt; viele Beweise werden dort jedoch dann durch Hinweis auf die analogen Beweise in Kapitel II erledigt.

Für die geduldige und wachsame Unterstützung meines Studiums und insbesondere für die Anregung, die zu dieser Arbeit führte, danke ich Herrn Professor K. Jacobs von Herzen.

Kapitel I

§1. Grundbegriffe

Sei $\Gamma = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ die Menge der ganzen Zahlen,
 $\Gamma^+ = \{1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen und

$$\Omega = \prod_{\Gamma} \{0, 1\} = \{ w = (\dots, w_{-1}, w_0, w_1, \dots) : w_t = 0 \text{ oder } 1, t \in \Gamma \}.$$

Mit der üblichen Produkttopologie ist Ω ein kompakter metrisierbarer Hausdorffraum. Die (endlichdimensionalen) Zylinder

$${}_i[c_1, \dots, c_t] = \{ w : w_i = c_1, \dots, w_{i+t-1} = c_t \}$$

sind zugleich offene und abgeschlossene Mengen und bilden für $i \in \Gamma$, $t \in \Gamma^+$, $c_1, \dots, c_t \in \{0, 1\}$ eine Basis der Produkttopologie in Ω . Eine Folge $C = (c_1, \dots, c_t)$ von Nullen und Einsen heißt ein Block der Länge t . Sind

$$C^i = (c_1^i, \dots, c_{t_i}^i) \quad (1 \leq i \leq n)$$

Blöcke der Länge t_i , so bezeichnen wir mit

$$(C^1, C^2, \dots, C^n)$$

den zusammengesetzten Block

$$(c_1^1, \dots, c_{t_1}^1, \dots, c_1^n, \dots, c_{t_n}^n).$$

Es sei

$${}_1[C] = {}_1[c_1, \dots, c_t]$$

der zum Block C gehörige Zylinder. Durch die Festsetzungen (Abbildungen werden rechts geschrieben)

$$w\tau = \eta \quad \text{und} \quad w\tau = \tilde{w}$$

$$\text{mit} \quad w_{i+1} = \eta_i \quad \text{und} \quad \tilde{w}_i = 1 - w_i \quad (i \in \Gamma)$$

werden die Transformationen T (Linksschiebung) und τ (Spiegelung) von Ω auf sich erklärt. T und T^{-1} (Rechts-schiebung) sowohl wie τ bilden Zylinder auf Zylinder ab und sind deshalb stetig. Es gilt $\tau = \tau^{-1}$. Das Symbol " $\sim$ " wird im folgenden stets für Spiegelung verwendet, d.h.

$$\tilde{0} = 1$$

$$\tilde{1} = 0$$

$$\tilde{C} = (1-c_1, \dots, 1-c_t) \text{ falls } C = (c_1, \dots, c_t)$$

$$\tilde{f}(w) = f(\tilde{w}) \text{ falls } f \text{ Funktion auf } \Omega.$$

τ -invariante Mengen, Funktionen, Maße, u.s.w. werden wir auch als symmetrische Mengen, Funktionen, Maße, u.s.w. bezeichnen.

Für ein festes $a \in \Omega$ bezeichnen wir mit Ω_a die abgeschlossene Hülle der Bahn von a , d.h.

$$\Omega_a = \overline{\{\dots, aT^{-1}, a, aT, \dots\}}.$$

Ist $a = (\dots, a_0, a_1, \dots) \in \Omega$, so setzen wir

$$a(k, n) = (a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n-1}).$$

Dieselbe Bezeichnung (wenn sinnvoll) wenden wir auf endliche Folgen (d.h. Blöcke) an. Man kann Ω_a auf andere Weise beschreiben, nämlich

$$\Omega_a = \{ w : \text{für jedes } n \in \Gamma^+ \text{ existiert ein } t \in \Gamma \text{ mit} \\ w(-n, 2n+1) = aT^t(-n, 2n+1) \}.$$

Sei nun $a \in \Omega$ und C ein Block. Wir setzen

$$\eta_k(C, a) = \begin{cases} 1 & \text{falls } aT^k \in {}_0[C] \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$\eta(C, a) = (\dots, \eta_0(C, a), \eta_1(C, a), \dots).$$

Für jeden Block C und jedes $a \in \Omega$ ist dann $\eta(C, a) \in \Omega$.

$\eta(C, a)$ kann man auf folgende Weise interpretieren:

$\eta_k(C, a) = 1$ genau dann, wenn der Block C an der Stelle k in a vorkommt, d.h. wenn $C = a(k, t)$ gilt (falls C die Länge t hat).

Wir werden $\eta(C, a)$ den C-Punkt zu a nennen.

Ist $\eta = (\dots, \eta_0, \eta_1, \dots) \in \Omega$, so setzen wir

$$S_\eta(k, n) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{k+n-1} \eta_j \quad (k \in \Gamma, n \in \Gamma^+).$$

Diese sind die endlichen Cesàro-Summen von η . Man sagt daß η gleichmäßig Cesàro-konvergiert, wenn

$$\lim_n S_\eta(k, n)$$

gleichmäßig in $k \in \Gamma$ existiert. Die Limites sind für jedes k gleich, und wir schreiben

$$S_\eta^* = g.C.\lim S_\eta(k, n).$$

Sei Ω'' ein symmetrischer Unterraum von Ω und m ein Maß auf Ω'' . (Alle Maße in dieser Arbeit sind jeweils auf dem von der Topologie erzeugten Borelkörper definiert.) Ist $L^2 = L_m^2(\Omega'')$ der Hilbertraum der komplexwertigen quadratisch-integrierbaren Funktionen auf Ω'' , so können wir die Unterräume

$$M^1 = \{ f : f \in L^2, \tilde{f} = f \}$$

$$M^{-1} = \{ f : f \in L^2, \tilde{f} = -f \}$$

bilden. Ist m symmetrisch, so ist es leicht zu sehen daß

$$L^2 = M^1 + M^{-1}$$

gilt. Ist außerdem m T-invariant, so folgt: M^1 und M^{-1} sind auch T-invariant.

§2. Vorbereitende Resultate

Definition 2.1 : Das Paar (X, φ) heißt ein dynamisches System, wenn X ein kompakter Hausdorffraum und φ ein Homöomorphismus von X auf sich ist.

Sei (X, φ) ein dynamisches System.

Definition 2.2 : $Y \subset X$ heißt minimal invariant, wenn

1. $Y = Y = Y\varphi \neq \emptyset$, und
2. $Z \subset Y$ und $Z = Z\varphi \neq \emptyset$ implizieren $Y = Z$.

Für jeden Punkt $x \in X$ bezeichnen wir mit

$$O(x) = \{ x\varphi^k : k \in \mathbb{Z} \}$$

die Bahn von x .

Definition 2.3 : $Y \subset X$ heißt strikt ergodisch, falls

1. Y minimal invariant, und
2. genau ein φ -invariantes normiertes Maß auf Y existiert.

Ist die abgeschlossene Hülle $\overline{O(x)}$ der Bahn $O(x)$ von x strikt ergodisch, so heißt der Punkt x auch strikt ergodisch. In diesem Fall ist das durch x eindeutig bestimmte normierte Maß automatisch ergodisch und wird mit m_x bezeichnet. Unter dem Spektrum bzw. Punktspektrum eines strikt ergodischen Punktes x werden wir das Spektrum bzw. Punktspektrum des von φ in $L^2_{m_x}$ induzierten unitären Operators φ_x verstehen. Das Punktspektrum ist in diesem Falle bekanntlich stets eine Untergruppe der Kreisgruppe $\{ z : z \text{ komplex, } |z| = 1 \}$.

Man kann also von der Eigenwertgruppe von x sprechen.

Anmerkung : Setzen wir $X = \Omega$ und $\varphi = T$ (§1), so können wir unter der Annahme, m_x sei symmetrisch, sinngemäß auch vom Spektrum von x in M^1 bzw. M^{-1} reden.

Beispiel (Kakutani [3]) : Sei $(X, \varphi) = (\Omega, T)$ und $x \in \Omega$ durch

$$1. x_1 = 0, x_2 = 1,$$

$$2. x_{2^n+k} = 1-x_k \quad (1 \leq k \leq 2^n, n \in \Gamma^+),$$

$$3. x_{-k+1} = x_k \quad (k \in \Gamma^+)$$

definiert. Die Folge

$$x = (\dots, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (\dots, 0, 1, 1, 0, \dots)$$

wird als die Morse-Folge bezeichnet und x ist strikt ergodisch. Ist m_x das einzige T -invariante Maß auf $\overline{O(x)}$, so kann man zeigen daß m_x auch symmetrisch ist. Deshalb gilt

$$L_{m_x}^2 = M^1 + M^{-1}$$

und wegen $\tau T = T \tau$ sind M^1 und M^{-1} T -invariant. T hat auf M^{-1} kontinuierliches Spektrum und auf M^1 rein diskretes Spektrum mit der Gruppe der 2^k -ten Einheitswurzeln als Eigenwertgruppe.

Wir benötigen später den

Satz 2.4 (Gottschalk [1]-Oxtoby [4]-Kakutani [3]) :

Ein Punkt $a \in \Omega$ ist dann und nur dann strikt ergodisch, wenn

- A. Für jeden Block C $\eta(C, a)$ gleichmäßig Cesàro-konvergiert, und
- B. $S_{\eta(C, a)}^* > 0$ falls ein $i \in \Gamma$ mit $a \in i_1[C]$ existiert.

Anmerkung : Die Aussage A ist gleichbedeutend damit, daß nur ein einziges normiertes Maß m_a auf Ω_a existiert. Dieses Maß ist natürlich ergodisch und für jeden Block C hat man

$$(1) \quad m_a(k[C]) = S_{\eta(C,a)}^* \quad (k \in \Gamma).$$

Dieser Teil des Satzes stammt von Oxtoby, während Teil B, welcher unter der Voraussetzung von A mit der Minimalinvarianz von Ω_a äquivalent ist, von Gottschalk herrührt. Die obige Form des Satzes verdankt man Kakutani.

§3. Cesàro-Summen

Sei $\eta \in \Omega$ mit

$$\eta = (\dots, \eta_0, \eta_1, \dots).$$

Lemma 3.1 : Sind $k \in \Gamma$, $i, n_1, \dots, n_i \in \Gamma^+$ und $n = \sum_{j=1}^i n_j$, so ist

$$S_{\eta}(k, n) = \sum_{j=1}^i \frac{n_j}{n} S_{\eta}(k + \sum_{p=1}^{j-1} n_p, n_j).$$

Für $n_1 = n_2 = \dots = n_i = n'$ vereinfacht sich dies zu

$$S_{\eta}(k, n) = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i S_{\eta}(k + (j-1)n', n').$$

Der Beweis ist trivial.

Seien $k, k' \in \Gamma$, $n \in \Gamma^+$, $\eta, \eta' \in \Omega$ mit

$$\eta = (\dots, \eta_0, \eta_1, \dots)$$

und

$$\eta' = (\dots, \eta'_0, \eta'_1, \dots).$$

Lemma 3.2 : Es gebe eine eindeutige Abbildung φ von der Menge $\{k, k+1, \dots, k+n-1\}$ in die Menge $\{k', \dots, k'+n-1\}$ und eine natürliche Zahl j derart, daß

$$|\{ i : k \leq i < k+n, \eta_i \neq \eta'_{i\varphi} \}| \leq j$$

gilt. Dann ist

$$|S_\eta(k, n) - S_{\eta'}(k', n)| \leq \frac{j}{n}.$$

Der Beweis ist trivial.

Lemma 3.3 : Die folgenden Aussagen sind für $\eta \in \Omega$ äquivalent:

1. η ist gleichmäßig Cesàro-konvergent.

2. Zu jedem $\delta > 0$ existiert ein $N \in \Gamma^+$ derart, daß

$$(2) \quad |S_\eta(1, N) - S_\eta(kN+1, N)| < \delta \quad (k \in \Gamma)$$

gilt.

Beweis: 2. folgt aus 1. nach der Definition vom gleichmäßigen Cesàro-Konvergenz. Wir zeigen daß 1. aus 2. folgt:

Zu $\delta > 0$ wähle N wie in 2. und $N' \geq \frac{N}{\delta}$. Mit Hilfe von Lemma 3.1 zeigt man leicht, daß

$$|S_\eta(k, N') - S_\eta(k', N')| < 4\delta \quad (k, k' \in \Gamma)$$

gilt. Aus der Beschränktheit der Summen ($0 \leq S_\eta(k, N) \leq 1$) folgt die Behauptung.

Kapitel II

In diesem Kapitel wollen wir einen strikt ergodischen Punkt $a \in \Omega$ konstruieren, dessen Punktspektrum genau aus der Menge der 3^k -ten Einheitswurzeln für alle $k \in \Gamma^+$ besteht, und unsere Theorie in diesem Spezialfall vollständig durchführen.

§1. Die Konstruktion

Wir konstruieren einen Punkt $a \in \Omega$ wie folgt:

$$1. (a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 1)$$

2. Für $k \in \Gamma^+$ führen wir die Bezeichnung

$$a^k = (a_1, \dots, a_{3^k}) = a(1, 3^k)$$

ein. Ist nun a^k definiert, so sei

$$a^{k+1} = (a^k, a^k, \tilde{a}^k).$$

3. Für gerade $k \in \Gamma^+$ sei

$$a(-3^{k+1}, 3^k) = a^k.$$

Der Punkt a hat dann die Gestalt

$$a = (...001001110001001110110110001...)$$

(wobei die eingetragenen Ziffer $a(1, 27)$ darstellen).

Die folgenden Sätze werden wir mit Hilfe einer Reihe von Lemmata beweisen.

Satz 1.1 : Ω_a ist strikt ergodisch.

Satz 1.2 : Sei m_a das ergodische Maß auf Ω_a . Dann gilt:

a) m_a ist symmetrisch und die Unterräume M^1 und M^{-1} sind T-invariant.

- b) T hat auf M^1 rein diskretes Spektrum. Die Eigenwertgruppe ist die Gruppe der $3^{k\text{-ten}}$ Einheitswurzeln.
 c) T hat auf M^{-1} kontinuierliches Spektrum.

Dazu benötigen wir erstens einige einfache Aussagen über die Struktur von a.

Lemma 1.3 : a) $a(j3^{k+1}, 3^k) = a^k$ oder $\tilde{a}^k$ ($k \in \Gamma^+$, $j \in \Gamma$).

- b) Setzen wir für $C = a^k$ oder $\tilde{a}^k$

$$\psi_k(C) = \begin{cases} 1 & (C = \tilde{a}^k) \\ 0 & (C = a^k) \end{cases},$$

so ist für beliebige $k \in \Gamma^+$, $j \in \Gamma^+$

$$\psi_k(a((j-1)3^{k+1}, 3^k)) = a_j$$

(die linke Seite ist wegen a) stets definiert).

Man kann dies auch wie folgt ausdrücken:

Für $k, j \in \Gamma^+$ beliebig gilt

$$\eta_{(j-1)3^{k+1}}(a^k, a) = \tilde{\eta}_{(j-1)3^{k+1}}(\tilde{a}^k, a) = \eta_j(a^1, a).$$

- c) Zu jedem $k \in \Gamma^+$ existieren $j, j' \in \Gamma^+ \cup \{0\}$ mit

$$a(-3^{k+1}, 2 \cdot 3^k) = a(j3^{k+1}, 2 \cdot 3^k) = \tilde{a}(j'3^{k+1}, 2 \cdot 3^k).$$

Beweis: a) ist durch ein leichtes Induktionsargument zu beweisen. b) folgt aus der Definition von a, denn für gegebenes $k \in \Gamma^+$ kann man

$$(a_1, a_2, \dots)$$

als eine Folge

$$(a^k, a^k, \tilde{a}^k, \dots)$$

schreiben (nach a)). Ersetzt man nun a^k durch 0, $\tilde{a}^k$ durch 1,

so sieht man nach Punkt 2 der Definition von a daß die ersten drei Terme der modifizierten Folge gerade $(0,0,1)$ sind, und wenn b^j die ersten 3^j Terme der modifizierten Folge darstellt, so gilt

$$b^{j+1} = (b^j, b^j, \tilde{b}^j).$$

Dies bedeutet nichts anderes, als daß die modifizierte Folge $(a_1, a_2, \dots)$ ist.

Um c) zu beweisen schreibt man a^{k+2} als eine Sequenz von a^k und $\tilde{a}^k$ hin:

$$a^{k+2} = (a^k, a^k, \tilde{a}^k, a^k, a^k, \tilde{a}^k, \tilde{a}^k, a^k).$$

Wegen a) ist $a(-3^{k+1}, 2 \cdot 3^k)$ gleich einer der vier Ausdrücke

$$(a^k, a^k) \quad (a^k, \tilde{a}^k) \quad (\tilde{a}^k, a^k) \quad (\tilde{a}^k, \tilde{a}^k)$$

und diese kommen mit ihren Gespiegelten alle in a^{k+2} vor.

In den nächsten beiden Paragraphen erfolgen nun die weiteren Schritte zum Beweis der Sätze 1.1 und 1.2.

§2. Strikte Ergodizität von $\mathcal{O}_a$

Lemma 2.1 : Es gelte die

Bedingung A1: Zu jedem $\delta > 0$ und jedem Block C der Länge t existiert ein $k \in \Gamma^+$ mit $\frac{t}{3^k} < \delta$ derart, daß

$$(3) \quad |S_{\eta(C,a)}(1, 3^k) - S_{\eta(\tilde{C},a)}(1, 3^k)| < \delta$$

gilt.

Dann folgt die gleichmäßige Cesàro-Konvergenz von $\eta(\tilde{C}, a)$ und $\eta(C, a)$. Es gilt

$$S_{\eta(C,a)}^* = S_{\eta(\tilde{C},a)}^* .$$

Beweis: Gilt die gleichmäßige Cesàro-Konvergenz von $\eta(C, a)$ und $\eta(\tilde{C}, a)$, so folgt aus (3) daß

$$S_{\eta}^*(C, a) = S_{\eta}^*(\tilde{C}, a)$$

gilt. Wir sind also fertig wenn wir zeigen (siehe I.3.3):

Zu jedem Block C der Länge t und jedem $\delta > 0$ existiert ein $N \in \Gamma^+$ derart, daß (2) gilt.

Wir wählen also k zu C und $\frac{\delta}{2}$ wie in A1, und setzen $N = 3^k$. Sei $\eta = \eta(C, a)$ und $\xi = \eta(\tilde{C}, a)$. Nach Lemma 1.3a) ist für $j \in \Gamma$

$$a(j3^{k+1}, 3^k) = a^k \text{ oder } \tilde{a}^k,$$

also

$$\eta(j3^{k+1}, 3^{k-t}) = \eta(1, 3^{k-t}) \text{ oder } \xi(1, 3^{k-t}).$$

Nach Lemma I.3.2 gilt dann entweder

$$(4) \quad |S_{\eta}(j3^{k+1}, 3^k) - S_{\eta}(1, 3^k)| \leq \frac{t}{3^k} < \delta$$

oder

$$(5) \quad |S_{\eta}(j3^{k+1}, 3^k) - S_{\xi}(1, 3^k)| \leq \frac{t}{3^k} < \frac{\delta}{2}.$$

Wegen der Ungleichung (3) folgt aus (5) auch (4) und der Beweis ist fertig.

Bemerkung: Unter der Voraussetzung A1 folgt die strikte Ergodizität von Ω_a , denn die Forderung B in Satz I.2.4 folgt trivialerweise aus Lemma 1.3a) und 1.3c). Offenbar folgt aus (3) die Symmetrie

$$S_{\eta}^*(C, a) = S_{\eta}^*(\tilde{C}, a),$$

und wenn wir mit m_a das ergodische Maß auf Ω_a bezeichnen, dann erhalten wir

$$m_a(i[C]) = m_a(i[\tilde{C}]) \quad (i \in \Gamma).$$

Daraus folgt: m_a ist ein symmetrisches Maß auf Ω_a .

Die nächsten beiden Lemmata werden uns die Gültigkeit von A1 und damit den Beweis von Satz 1.1 (strikte Ergodizität von a) sowie die Symmetrie von m_a liefern.

Lemma 2.2 : Für $C = (0)$ gilt

$$g.C.\lim \eta(C, a) = g.C.\lim \eta(\tilde{C}, a) = \frac{1}{2}.$$

Beweis: Sei

$$\alpha(k) = S_{\eta(C, a)}(1, 3^k).$$

Dann ist

$$1 - \alpha(k) = S_{\eta(\tilde{C}, a)}(1, 3^k).$$

Es gilt natürlich $\eta(C, a) = a$ und $\eta(\tilde{C}, a) = \tilde{a}$. Mit Hilfe von Lemma I.3.1 bekommt man

$$\alpha(k+1) = \frac{\alpha(k) + 1}{3}.$$

Es ergibt sich

$$1 - 2\alpha(k+1) = \frac{1 - 2\alpha(k)}{3},$$

also

$$|1 - 2\alpha(k+1)| = 3^{-(k+1)}.$$

Deshalb ist

$$|S_a(1, 3^k) - S_{\tilde{a}}(1, 3^k)| = |1 - 2\alpha(k)| = \frac{1}{3^k} < \delta$$

für k groß genug. Aus Lemma 2.1 folgt die Behauptung.

Lemma 2.3 : Sei $C = (c_1, \dots, c_t)$ und $\delta > 0$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}^+$ derart, daß die folgenden Ungleichungen gelten:

$$(6) \quad |S_{\eta(C, a)}(1, 3^k) - S_{\eta(\tilde{C}, a)}(1, 3^k)| < 3\delta$$

$$\frac{t}{3^k} < \delta.$$

Beweis: Sei $\eta = \eta(C, a)$ und $\xi = \eta(\tilde{C}, a)$. Man wähle $p, q \in \Gamma^+$ mit $\frac{t}{3^p} < \delta$ und

$$(7) \quad \left| \frac{1}{2} - S_a(1, 3^q) \right| < \delta.$$

Wir setzen $k = p + q$ und zeigen (6) für dieses k . Erstens gilt nach Lemma I.3.1

$$S_\eta(1, 3^k) = \frac{1}{3^q} \sum_{j=0}^{3^q-1} S_\eta(j3^{p+1}, 3^p)$$

$$S_\xi(1, 3^k) = \frac{1}{3^q} \sum_{j=0}^{3^q-1} S_\xi(j3^{p+1}, 3^p).$$

Auf Grund von (7) kann man eine Abbildung φ von der Menge $\{1, \dots, 3^q\}$ auf sich finden, so daß

$$\frac{|\{j : 1 \leq j \leq 3^q, a_j = a_{\varphi(j)}\}|}{3^q} < 2\delta$$

gilt. Ist nun $1 \leq j \leq 3^q$ und $a_j \neq a_{\varphi(j)}$, so ist wegen Lemma 1.3b)

$$a((j-1)3^{p+1}, 3^p) = \tilde{a}((\varphi(j)-1)3^{p+1}, 3^p).$$

Es gilt also für $1 \leq i \leq 3^{p-t}$

$$\eta_{(j-1)3^{p+1}} = \xi_{(\varphi(j)-1)3^{p+1}}.$$

Aus Lemma I.3.2 folgt dann

$$|S_\eta((j-1)3^{p+1}, 3^p) - S_\xi((\varphi(j)-1)3^{p+1}, 3^p)| \leq \frac{t}{3^p} < \delta.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} & |S_\eta(1, 3^k) - S_\xi(1, 3^k)| = \\ &= \frac{1}{3^q} \left| \sum_{j=1}^{3^q} [S_\eta((j-1)3^{p+1}, 3^p) - S_\xi((\varphi(j)-1)3^{p+1}, 3^p)] \right| < \\ &< \delta + \frac{1}{3^q} \sum_{\substack{j=1 \\ a_j = a_{\varphi(j)}}}^{3^q} \max |S_\eta(.,.) - S_\xi(.,.)| < 3\delta, \text{ w.z.b.w.} \end{aligned}$$

Damit sind nach der Bemerkung von vorhin die strikte Ergodizität von Ω_a , d.h. Satz 1.1, und die Symmetrie von m_a bewiesen, da in Lemma 2.3 die Voraussetzung A1 zu Lemma 2.1 bewiesen wurde.

§3. Spektraleigenschaften von Ω_a

Da m_a symmetrisch ist, haben wir schon Teil a) von Satz 1.2 bewiesen (siehe Ende von Kapitel I, §1). Wir bemühen uns nun, Teil b) von Satz 1.2 zu beweisen.

Sei A_k der zu a^k gehörige Zylinder und

$$B_k = (A_k \cup \tilde{A}_k) \cap \Omega_a.$$

Lemma 3.1 : Für jedes $k \in \Gamma^+$ gelten folgende Aussagen:

- a) Die Mengen $B_k, B_k T^{-1}, \dots, B_k T^{-3^k+1}$ sind paarweise disjunkt.
- b) $\Omega_a = \bigcup_{j=0}^{3^k-1} B_k T^{-j}$.
- c) $B_k = B_k T^{-3^k}$.

Beweis: 1. $aT^t \in B_k$ genau dann, wenn $t = 0 \bmod 3^k$.

Ist $t = 0 \bmod 3^k$, so folgt direkt aus Lemma 1.3a) $aT^t \in B_k$. Es bleibt zu beweisen, daß $t = 0 \bmod 3^k$ aus $aT^t \in B_k$ folgt.

Für $k = 1$ ist dies richtig: Sei $aT^t \in B_1$. Das bedeutet

$$(a_{t+1}, a_{t+2}, a_{t+3}) = (001) \text{ oder } (110),$$

also $a_{t+1} = a_{t+2}$. Ist aber $t = 1 \bmod 3$, so ist $t-1 = 0 \bmod 3$ und

$$(a_t, a_{t+1}, a_{t+2}) = (001) \text{ oder } (110),$$

also $a_{t+1} \neq a_{t+2}$. Mit der selben Methode leitet man aus

$$t = 2 \bmod 3$$

einen Widerspruch ab; es gilt also $t = 0 \bmod 3$.

Ist nun die Aussage für k richtig, so ist sie auch für $k+1$ richtig: Sei $aT^t \in B_{k+1}$ und

$$t = t^* \bmod 3^{k+1}$$

für ein t^* mit $0 < t^* < 3^{k+1}$. Offenbar ist

$$B_{k+1} \subset B_k,$$

also

$$aT^t \in B_k,$$

und aus der Induktionsannahme folgt

$$t^* = 0 \bmod 3^k,$$

d.h. $t^* = 3^k$ oder $2 \cdot 3^k$. Nun rechnet man ähnlich wie im Fall $k = 1$: Aus

$$aT^t \in B_{k+1} \text{ und } t^* = 3^k$$

folgt

$$a(t+1, 3^{k+1}) = (a^k, a^k, \tilde{a}^k) \text{ oder } (\tilde{a}^k, \tilde{a}^k, a^k)$$

$$a(t-t^*+1, 3^{k+1}) = (a^k, a^k, \tilde{a}^k) \text{ oder } (\tilde{a}^k, \tilde{a}^k, a^k),$$

also ein Widerspruch, und man macht es genau so für $t^* = 2 \cdot 3^k$.

2. Zu jedem $\omega \in \Omega_a$ existiert ein $t \in \Gamma$ mit

$$aT^t(1, 2 \cdot 3^k) = \omega(1, 2 \cdot 3^k).$$

Deshalb ist für $0 \leq j \leq 3^k$

$$\omega \in B_k T^{-j}$$

genau dann, wenn

$$aT^t \in B_k T^{-j}$$

für ein solches t gilt.

a) Ist $w \in B_k$, so folgt $aT^t \in B_k$, und nach Punkt 1 des Beweises

$$t = 0 \bmod 3^k.$$

Für $0 < j < 3^k$ gilt

$$t+j \not\equiv 0 \bmod 3^k,$$

also

$$aT^{t+j} \notin B_k$$

oder

$$aT^t \notin B_k T^{-j}.$$

Darum gilt

$$B_k \cap B_k T^{-j} = \emptyset \quad (0 < j < 3^k),$$

und nach mehrfacher Anwendung von T^{-1} bekommt man die Gültigkeit von a).

b) Ist $w \in \Omega_a$ und $t \in \Gamma$ mit

$$aT^t(1, 2 \cdot 3^k) = w(1, 2 \cdot 3^k),$$

so sei t^* gewählt mit $0 \leq t^* < 3^k$ und

$$t+t^* = 0 \bmod 3^k.$$

Es folgt

$$aT^{t+t^*} \in B_k,$$

also auch

$$wT^{t^*} \in B_k.$$

Es gilt dann b).

c) Ist $w \in B_k$ und $t \in \Gamma$ wie in b), so folgt

$$t+3^k = 0 \bmod 3^k,$$

also

$$wT^{3^k} \in B_k.$$

Dann gilt

$$B_k T^{-3^k} = B_k.$$

Lemma 3.2 : a) Zu jedem $k \in \Gamma$ existiert eine Funktion

$f_k \in M^1$ derart, daß

$$f_k^T = e^{2\pi i \zeta^{-k}} f_k$$

gilt.

b) Sei A die (komplex-)lineare Hülle der Menge

$\{ f : f \in M^1, \text{ es existieren } k, j \in \Gamma^+ \text{ mit}$

$$f^T = e^{2\pi i j \zeta^{-k}} f \}.$$

Dann liegt A in M^1 dicht.

Beweis: a) Nach Lemma 3.1 braucht man nur für $\lambda = e^{2\pi i \zeta^{-k}}$

$$f_k = \sum_{j=0}^{\zeta^k-1} \lambda^{-j} 1_{B_k^T - j}$$

zu setzen. Dann ist wegen $B_k = \tilde{B}_k$

$$f_k \in M^1$$

und mit Hilfe von Lemma 3.1 bekommt man

$$f_k^T = \lambda f_k.$$

b) Man rechnet leicht aus, daß

$$\sum_{j=0}^{\zeta^k-1} f_k^j = \zeta^k \cdot 1_{B_k} \quad (k \in \Gamma^+)$$

gilt, also

$$1_{B_k} \in A$$

(denn f_k^j ist eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ^j). Die

Menge A ist offenbar T -invariant weil die Menge der Eigenfunktionen zu einem festen Eigenwert T -invariant ist.

Also gilt

$$1_{B_k^T - j} \in A \quad (k, j \in \Gamma^+).$$

Sei nun $C = (c_1, \dots, c_t)$ und

$$D = \gamma[C] \cup \gamma[\tilde{C}].$$

Die Menge aller γ_{DT^j} für $j \in \Gamma$ und C beliebig liegt in M^1 dicht. Wegen der T-Invarianz von A ist es hinreichend zu zeigen: Es existieren Mengen D_k ($k \in \Gamma^+$) derart, daß

$$\gamma_{D_k} \in A$$

und

$$\lim_k \int |\gamma_D - \gamma_{D_k}|^2_{dm_a} = 0.$$

wir definieren also

$$D_k = \cup B_k T^{-j}$$

wobei die Vereinigung über alle $B_k T^{-j}$ geht, die

$$B_k T^{-j} \subset D$$

erfüllen. Es folgt

$$D_k \subset D,$$

und die Funktionen

$$g_k = \gamma_D - \gamma_{D_k}$$

sind stetig, da D und D_k Vereinigungen von endlichvielen Zylindern sind. Es ist

$$g_k = |g_k|^2.$$

Also können wir schreiben

$$\int |g_k|^2_{dm_a} = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g_k(aT^j).$$

Sei nun $j \in \Gamma^+$ mit $j = j^* \bmod 3^k$ und $0 \leq j^* < 3^k$. Ist sogar $0 \leq j^* < 3^{k-t}$ und $aT^j \in D$, so folgt

$$aT^j \in B_k T^j$$

und

$$B_k T^j \subset D_k,$$

d.h.

$$g_k(aT^j) = 0.$$

Daraus folgt

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g_k(aT^j) \leq \frac{t}{z^k},$$

und da t fest ist, kann dieser Limes nur gleich 0 sein.

Damit ist der Beweis zu Lemma 3.2 fertig und Teil b) von Satz 1.2 bewiesen. Die folgenden Lemmata enthalten den Beweis für Teil c) des Satzes 1.2.

Lemma 3.3 : Ist T^2 ergodisch, so hat M^{-1} kontinuierliches Spektrum.

Beweis: Sei $f \in M^{-1}$ und $fT = \lambda f$. Dann ist $f^2 \in M^1$ und $f^2T = \lambda^2 f^2$, also nach Teil b) des Satzes 1.2

$$\lambda^2 = e^{2\pi i n z^{-k}}$$

für geeignete k und n mit $k \in \Gamma^+$, $0 \leq n < z^k$, $(n, z^k) = 1$.

Es gilt aber

$$\lambda z^k \neq 1,$$

denn $f z^k \in M^{-1}$ und kann nicht konstant sein. Also ist

$$\lambda z^k = e^{2\pi i n/2} = -1.$$

Sei $g = f z^k \in M^{-1}$. Es gilt

$$gT = -g,$$

also

$$gT^2 = g.$$

Ist T^2 ergodisch, so liefert dies einen Widerspruch, denn $g \in M^{-1}$ kann nicht konstant sein.

Wir wollen jetzt die Ergodizität von T^2 beweisen.

Sei C ein Block und $\eta(C, a)$ der C -Punkt zu a . Wir setzen

$$\xi_i(C, a) = \eta_{2i-1}(C, a) \quad (i \in \Gamma)$$

und

$$\xi(C, a) = (\dots, \xi_1(C, a), \xi_2(C, a), \dots).$$

Dann gilt

$$\xi(C, a) = (\dots, \eta_1(C, a), \eta_3(C, a), \dots)$$

$$\xi(C, aT) = (\dots, \eta_2(C, a), \eta_4(C, a), \dots).$$

Bildet man die Ausdrücke

$$\begin{aligned} S_C^u(k) &= S_{\xi(C, a)}(1, \frac{3^k+1}{2}) \\ S_{\tilde{C}}^u(k) &= S_{\xi(\tilde{C}, a)}(1, \frac{3^k+1}{2}) \\ (8) \quad S_C^g(k) &= S_{\xi(C, aT)}(1, \frac{3^k-1}{2}) \\ S_{\tilde{C}}^g(k) &= S_{\xi(\tilde{C}, aT)}(1, \frac{3^k-1}{2}), \end{aligned}$$

so hat man nach Lemma I.3.1 die Beziehungen

$$\begin{aligned} S_{\eta(C, a)}(1, 3^k) &= \frac{1+3^{-k}}{2} S_C^u(k) + \frac{1-3^{-k}}{2} S_C^g(k) \\ S_{\eta(\tilde{C}, a)}(1, 3^k) &= \frac{1+3^{-k}}{2} S_{\tilde{C}}^u(k) + \frac{1-3^{-k}}{2} S_{\tilde{C}}^g(k). \end{aligned}$$

Lemma 3.4 : Es gelte die

Bedingung A'1: Zu jedem $\delta > 0$ und jedem Block C der Länge t existiert ein $k \in \Gamma^+$ mit $\frac{t}{3^k} < \delta$ derart, daß

$$|R(k) - R^*(k)| < \delta$$

gilt, falls $R(\cdot)$ und $R^*(\cdot)$ irgend zwei der Ausdrücke in (8) repräsentieren.

Dann folgt die gleichmäßige Cesàro-Konvergenz von $\xi(C, a)$, $\xi(C, aT)$, $\xi(\tilde{C}, a)$, und $\xi(\tilde{C}, aT)$. Es gilt

$$S_{\xi(C, a)}^* = S_{\xi(\tilde{C}, a)}^* = S_{\xi(C, aT)}^* = S_{\xi(\tilde{C}, aT)}^*.$$

Beweis: Dieses Lemma beweist man genau wie Lemma 2.1.

Lemma 3.5 : Für $C = (0)$ gilt

$$\begin{aligned} g.C.\lim \xi(C,a) &= g.C.\lim \xi(\tilde{C},a) = \\ &= g.C.\lim \xi(C,aT) = g.C.\lim \xi(\tilde{C},aT) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Beweis: Wir zeigen daß $A'1$ erfüllt ist. Es ist offenbar

$$x_1^{(k)} = \frac{1+3^{-k}}{2} S_C^u(k) = \text{relative Häufigkeit von Nullen an den ungeraden Stellen in } a(1,3^k).$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1+3^{-k}}{2} S_C^u(k) = \text{relative Häufigkeit von Einsen an den ungeraden Stellen in } a(1,3^k).$$

$$x_3^{(k)} = \frac{1-3^{-k}}{2} S_C^g(k) = \text{relative Häufigkeit von Nullen an den geraden Stellen in } a(1,3^k).$$

$$x_4^{(k)} = \frac{1-3^{-k}}{2} S_C^g(k) = \text{relative Häufigkeit von Einsen an den geraden Stellen in } a(1,3^k).$$

Auf Grund der Definition von a rechnet man aus:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{3}(x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{3}(x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + x_4^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{3}(x_1^{(k)} + x_3^{(k)} + x_4^{(k)}) \\ x_4^{(k+1)} &= \frac{1}{3}(x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + x_4^{(k)}). \end{aligned}$$

Bildet man die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix},$$

so bekommt man für die Spaltenvektoren $x^{(k)}$ die Relationen

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} \quad (k \in \Gamma^+).$$

Durch Iteration erhält man

$$x^{(k+1)} = A^k x^{(1)}.$$

Rechnet man die Eigenwerte von A aus, so ergibt sich

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 1/3$$

$$\lambda_4 = -1/3,$$

also $|\lambda_i| < 1$ für $i > 1$. Sind p_i die Projektionen auf den Eigenräumen zu den λ_i , so gilt

$$A^n x = A^n \left(\sum_{i=1}^4 p_i(x) \right) = p_1(x) + \sum_{i=2}^4 \lambda_i^n p_i(x)$$

und daher

$$\lim_n A^n(x) = p_1(x).$$

Ist etwa

$$\sum_{i=1}^4 x_i = 1,$$

so ist

$$p_1(x) = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}.$$

Für den Vektor $x^{(1)}$ ist dies der Fall und wir bekommen

$$\lim_k x_i^{(k)} = 1/4 \quad (i = 1, \dots, 4).$$

Ist k nun groß, so sind alle $x_i^{(k)}$ dicht beieinander, und deshalb sind die Ausdrücke in (8) für dieses C dicht beieinander, w.z.b.w. Es gilt

$$\lim_k \frac{1+3^{-k}}{2} a_i^{(k)} = \frac{1}{2} \quad (i = 1, \dots, 4),$$

d.h. alle Limites haben den Wert $\frac{1}{2}$.

Lemma 3.6 : Bedingung A'1 ist wahr.

Beweis: Genau wie im Lemma 2.3.

Lemma 3.7 : T^2 ist ergodisch.

Beweis: Es reicht hin wenn wir zeigen:

Für jeden Block C gilt

$$(9) \quad \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_{[C]}(\omega T^{2k}) = \text{const.} \quad (\omega \in \Omega_a)$$

(siehe Jacobs [2]). (9) ist natürlich gleichbedeutend mit

$$(10) \quad \lim_n S_{\xi}(C, \omega)(1, n) = \text{const.} \quad (\omega \in \Omega_a).$$

Für $\omega \in \{aT^t : t \in \Gamma\}$ gilt aber (10) und zwar gleichmäßig (Lemmata 3.4 und 3.6), und für $\omega \in \Omega_a$ beliebig kann man eine Folge $t_1, t_2, \dots \in \Gamma$ finden derart, daß

$$\omega(1, n) = aT^{t_n}(1, n).$$

Also gilt (10) für alle $\omega \in \Omega_a$.

Aus Lemma 3.7 und Lemma 3.4 folgt nun, daß T auf M^{-1} kontinuierliches Spektrum hat. Damit ist Satz 1.2 vollständig bewiesen.

Kapitel III

Sei

$$K = \{ e^{2\pi i \lambda} : 0 \leq \lambda < 1, \lambda \text{ rational} \}$$

und K^* eine beliebige Untergruppe von K . In diesem Kapitel werden wir zu jedem solchen K^* einen Punkt $a = a(K^*) \in \Omega$ konstruieren so daß die Eigenwertgruppe zu $a(K^*)$ gerade K^* ist. Falls $|K^*| < \infty$ gilt, so ist K^* zyklisch und man kann als $a(K^*)$ einen periodischen Punkt von Ω wählen, dessen Periode gleich der Ordnung von K^* ist. Deshalb werden wir uns auf solche K^* beschränken, die unendlich-viele Elemente enthalten. Im folgenden sei also K^* eine Untergruppe von K mit $|K^*| = \infty$.

§1. K^* -Abbildungen

Lemma 1.1 : Sei $N \in \Gamma^+$ beliebig. Dann existieren natürliche Zahlen $n_1, n_2, \dots$ mit:

a) $N \leq n_1 < n_2 < \dots$

b) n_k teilt n_{k+j} $(k, j \in \Gamma^+)$

c) Die von

$$\{ e^{2\pi i / n_k} : k \in \Gamma^+ \}$$

erzeugte Gruppe ist K^* .

Beweis: Sei $\{k_1, k_2, \dots\} = K^*$ eine Abzählung der (abzählbare) Gruppe K^* , und K_k bezeichne die von

$$\{k_1, \dots, k_{N+k-1}\}$$

erzeugte Gruppe. Dann gilt

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K^*$$

$$\bigcup_{k \in \Gamma^+} K_k = K^*$$

$$K_k \text{ zyklisch} \quad (k \in \Gamma^+).$$

Setzt man

$$n_k = |K_k|,$$

so folgen unmittelbar b) und c). Durch Übergang zu einer Teilfolge bekommt man auch a).

Wir setzen

$$E = \{ (b_1, \dots, b_n) : b_i \in \{0, 1\} \quad (1 \leq i \leq n), \quad b_1 = 0, \\ (b_1, \dots, b_n) \neq (0, \dots, 0), \quad n > 1 \}.$$

Ferner sei t eine Abbildung von Γ^+ in E mit

$$t(k) = (b_1^{(k)}, \dots, b_{r_k}^{(k)}).$$

Definition 1.2 : t heißt K^* -Abbildung, wenn eine Folge $n_1, n_2, \dots$ von natürlichen Zahlen existiert mit:

1. $n_1 = r_1$
2. $n_{k+1} = r_{k+1} n_k \quad (k \in \Gamma^+)$
3. Die von $\{ e^{2\pi i / n_k} : k \in \Gamma^+ \}$

erzeugte Gruppe ist K^* .

Bemerkung: Lemma 1.1 sichert, daß stets K^* -Abbildungen existieren, und zwar mit beliebig großem r_1 .

§2. K^* -Punkte

Sei t eine K^* -Abbildung mit

$$t(k) = (b_1^{(k)}, \dots, b_{r_k}^{(k)}) \quad (k \in \Gamma^+)$$

$$n_1 = r_1, \quad n_{k+1} = r_{k+1} n_k \quad (k \in \Gamma^+).$$

Wir definieren eine Folge

$$a = a(t) = (\dots, a_0, a_1, \dots)$$

von Nullen und Einsen in der folgenden Weise:

$$1. a(1, n_1) = t(1).$$

2. Ist $a(1, n_k)$ für ein $k \in \Gamma^+$ definiert, so sei für $0 \leq s < r_{k+1}$

$$a(sn_k+1, n_k) = \begin{cases} a(1, n_k) & \text{falls } b_{s+1}^{(k+1)} = 0 \\ \tilde{a}(1, n_k) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen $b_1^{(k)} = 0$ ($k \in \Gamma^+$) ist diese Definition für $s = 0$ sinnvoll. Damit ist

$$(a_1, a_2, \dots)$$

definiert, und analog zu Lemma II.1.3a) gilt für $s \geq 0$

$$a(sn_k+1, n_k) = a(1, n_k) \text{ oder } \tilde{a}(1, n_k).$$

3. Für $k \in \Gamma^+$ setzt man nun

$$a(-n_k+1, n_k) = \begin{cases} a(1, n_k) & \text{falls } a_{n_k} = \tilde{b}_{n_1}^{(1)} \\ \tilde{a}(1, n_k) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen 2. ist diese Festsetzung sinnvoll, und a_k ist nun für alle $k \in \Gamma$ definiert.

Sei nun $k \in \Gamma^+$ fest. Wir definieren eine Abbildung t_k von Γ^+ in E durch die Festsetzung

$$t_k(j) = t(k+j) \quad (j \in \Gamma^+).$$

Bildet man die zu t_k gehörige Folge

$$a(t_k) = (\dots, a_0(t_k), a_1(t_k), \dots)$$

wie oben, so kann man $a(t)$ und $a(t_k)$ vergleichen. Wir verallgemeinern die in Kapitel II § 1 gegebene Definition von a^k zu

$$a^k = a(t)^k = (a_1, \dots, a_{n_k}) \quad (k \in \Gamma^+).$$

Lemma 2.1 : a) $a(jn_k+1, n_k) = a^k$ oder $\tilde{a}^k$ ($k \in \Gamma^+$, $j \in \Gamma$)

b) Setzen wir für $C = a(t)^k$ oder $\tilde{a}(t)^k$

$$\Psi_k(C) = \begin{cases} 0 & (C = a(t)^k) \\ 1 & (C = \tilde{a}(t)^k) \end{cases},$$

so ist für beliebige $k, j \in \Gamma^+$

$$\Psi_k(a(t)[(j-1)n_k+1, n_k]) = a_j(t_k).$$

(Die linke Seite ist wegen a) stets definiert.)

c) Zu $k \in \Gamma^+$ existieren j und j' aus $\Gamma^+ \cup \{0\}$ derart, daß

$$a(-n_k+1, 2n_k) = a(jn_k+1, 2n_k) = \tilde{a}(j'n_k+1, 2n_k).$$

Beweis: Wie im Lemma II.1.3.

Nun wollen wir den Begriff des K^* -Punktes erklären.

Ist

$$b = (b_1, \dots, b_n) \in E,$$

so bezeichnen wir mit:

- (11) $H_0^u(b)$ die relative Häufigkeit von Nullen an ungeraden Stellen in b ,
 $H_1^u(b)$ die relative Häufigkeit von Einsen an ungeraden Stellen in b ,
 $H_0^g(b)$ die relative Häufigkeit von Nullen an geraden Stellen in b ,
 $H_1^g(b)$ die relative Häufigkeit von Einsen an geraden Stellen in b .

Definition 2.2 : Der Punkt $a \in \Omega$ heißt K^* -Punkt, wenn eine K^* -Abbildung t existiert mit:

$$1. a(t) = a$$

2. Es existiert ein $\delta > 0$ derart, daß

$$H(t(k)) \geq \delta$$

für jedes $k \in \Gamma^+$ und jedes $H(\cdot)$ in (11).

3. Sei $t^*(k)$ einer der Blöcke

$$\begin{array}{ll} (t(k), t(k)) & (t(k), \tilde{t}(k)) \\ (\tilde{t}(k), t(k)) & (\tilde{t}(k), \tilde{t}(k)). \end{array}$$

Es wird dann für jedes $k \in \Gamma^+$ und jedes $t^*(k)$ gefordert: Falls ein j mit $1 \leq j \leq r_k$ existiert und

$$t^*(k)(j, r_k) = t(k)$$

oder

$$t^*(k)(j, r_k) = \tilde{t}(k),$$

so folgt $j = 1$.

Wir werden in §5 zeigen, wie man zu jedem K^* -Punkte konstruiert. Unser nächstes Ziel ist es jedoch, die folgenden Sätze zu beweisen.

Satz 2.3 : Jeder K^* -Punkt ist strikt ergodisch.

Satz 2.4 : Sei a ein K^* -Punkt und m_a das einzige normierte invariante (und folglich ergodische) Maß auf Ω_a . Dann gilt:

a) m_a ist symmetrisch; M^1 und M^{-1} sind T -invariant.

b) Auf M^1 hat T rein diskretes Spektrum, und die Eigenwertgruppe von T ist K^* .

c) T hat auf M^{-1} kontinuierliches Spektrum.

Die Beweise dieser Sätze laufen genau wie die Beweise der entsprechenden Sätze (II.1.1 und II.1.2) in Kapitel II. Wir werden deshalb die entsprechenden Lemmata angeben, aber auf deren Beweise größtenteils verzichten. Lemma II.1.3 haben wir schon oben in Lemma 2.1 übertragen.

§3. Strikte Ergodizität von K^* -Punkten

Lemma 3.1 : Es gelte die Bedingung:

Zu jedem $\delta > 0$ und jedem Block C der Länge t existiert ein $k \in \Gamma^+$ mit $\frac{t}{n_k} < \delta$ derart, daß

$$(12) \quad |S_{\eta(C,a)}(1, n_k) - S_{\eta(\tilde{C},a)}(1, n_k)| < \delta$$

gilt.

Dann folgt die gleichmäßige Cesàro-Konvergenz von $\eta(C,a)$ und $\eta(\tilde{C},a)$. Es gilt

$$S_{\eta(C,a)}^* = S_{\eta(\tilde{C},a)}^* .$$

Beweis: Wie im Lemma II.2.1.

Offenbar folgt Satz 2.3 sobald die Bedingung in Lemma 3.1 erfüllt ist, da B in Satz I.2.4 aus Lemma 2.1 trivialerweise folgt. Aus (12) folgt dann, daß das Maß m_a symmetrisch ist.

Lemma 3.2 : Für $C = (0)$ gilt

$$g.C.\lim \eta(C,a) = g.C.\lim \eta(\tilde{C},a) = \frac{1}{2} .$$

Beweis: Für einen beliebigen Block b sei

$H_0(b)$ = relative Häufigkeit von Nullen in b

$H_1(b)$ = relative Häufigkeit von Einsen in b .

Es gilt nun

$$H_0(a(1, n_k)) = S_{\eta(C, a)}(1, n_k)$$

$$H_1(a(1, n_k)) = S_{\eta(\tilde{C}, a)}(1, n_k).$$

Nach Definition 2.2 Punkt 2 existiert ein $\delta > 0$ derart, daß

$$H_0(t(k)) \geq \delta$$

$$H_1(t(k)) \geq \delta$$

für alle $k \in \Gamma^+$ gelten. Da t K^* -Abbildung ist, so ist

$$H_0(t(1)) = H_0(a(1, n_1))$$

und wir bekommen

$$|1 - 2H_0(a(1, n_1))| \leq 1 - 2\delta.$$

Nun ist nach Lemma I.3.1 $H_0(a(1, n_{k+1}))$ eine konvexe Kombination von $H_0(a(1, n_k))$ und $H_1(a(1, n_k))$. Dabei hängen die Gewichte von dem Block $t(k+1)$ ab. Durch ein leichtes Induktionsargument bekommt man

$$|1 - 2H_0(a(1, n_{k+1}))| \leq (1-2\delta)|1 - 2H_0(a(1, n_k))|,$$

also nach Iteration

$$|1 - 2H_0(a(1, n_k))| \leq (1-2\delta)^k.$$

Der Beweis läuft dann wie bei Lemma II.2.2.

Lemma 3.3 : Stets gilt die Bedingung in Lemma 3.1.

Beweis: Wie im Lemma II.2.3.

Damit ist Satz 2.3 und a) von Satz 2.4 bewiesen.

§4. Das Spektrum eines K^* -Punktes

Lemma 4.1 : Sei A_k der zu $a(t)^k$ gehörige Zylinder und

$$B_k = (A_k \cup \tilde{A}_k) \cap \Omega_a(t).$$

Dann gelten für jedes $k \in \Gamma^+$ folgende Aussagen:

- a) $B_k, B_k T^{-1}, \dots, B_k T^{-n_k+1}$ sind paarweise disjunkt.
- b) $\bigcup_{j=0}^{n_k-1} B_k T^{-j} = \Omega_a(t)$
- c) $B_k = B_k T^{-n_k}$.

Beweis: Analog zu Lemma II.3.1. Dieses Lemma beruht auf Punkt 3 von Definition 2.2, der den Beweis von Punkt 1 des Beweises zu Lemma II.3.1 ermöglicht.

Lemma 4.2 : a) Zu jedem $k \in \Gamma^+$ existiert eine Funktion

$$f_k \in M^1 \text{ derart, daß}$$

$$f_k T = e^{2\pi i / n_k} f_k$$

gilt.

b) Sei A die lineare Hülle der Menge

$$\{ f : f \in M^1, \text{ es existieren } k, j \in \Gamma^+ \text{ mit}$$

$$f T = e^{2\pi i j / n_k} f \}.$$

Dann liegt A in M^1 dicht.

Beweis: Wie im Lemma II.3.2.

Damit ist b) von Satz 2.4 bewiesen. Wie im Beweis von Lemma II.3.3 zeigt man:

Wenn $f \in M^{-1}$ und $f T = \lambda f$, dann existieren $g \in M^{-1}$

und $k \in \Gamma^+$ derart, daß

$$g T = e^{2\pi i / 2n_k} g$$

gilt.

Sei nun $k \in \Gamma^+$ fest, t_k wie in §2 definiert und B_k wie in Lemma 4.1. Das normierte Maß auf $\Omega_a(t)$ bzw. $\Omega_a(t_k)$ bezeichnen wir mit m bzw. m_k . (Der Punkt $a(t_k)$ ist ein L^* -Punkt, wobei L^* die von

$$\{ e^{2\pi i n_k / n_j} : k < j \in \Gamma^+ \}$$

erzeugte Gruppe ist, wie man leicht aus Definition 2.2 nachrechnet. Deshalb ist $\Omega_a(t_k)$ nach Satz 2.3 strikt ergodisch.) Das folgende Lemma stellt eine für den Beweis von Satz 2.4c) benötigte Verallgemeinerung von Lemma II.1.3 bzw. Lemma 2.1 dar.

Lemma 4.3 : Die dynamischen Systeme $(B_k, \frac{m}{m(B_k)}, T^{n_k})$ und $(\Omega_a(t_k), m_k, T)$ sind isomorph, wobei

$$\frac{m}{m(B_k)}$$

das auf B_k beschränkte normierte Maß darstellt.

Beweis: Sei $w \in B_k$. Wir setzen

$$w\chi = \zeta = (\dots, \zeta_0, \zeta_1, \dots)$$

mit

$$\zeta_j = \psi_k(w((j-1)n_k+1, n_k)).$$

Dies ist deswegen sinnvoll, weil w von aT^t approximiert werden kann, wobei wegen $w \in B_k$ notwendigerweise

$$t = 0 \bmod n_k$$

gilt (siehe Lemma 4.1). Offenbar ist χ eine 1-1 Abbildung von B_k in Ω mit

$$\chi T = T^{n_k} \chi.$$

Lemma 2.1b) zeigt, daß

$$w\chi \in \Omega_a(t_k) \quad (w \in B_k)$$

gilt; nach einfacher Rechnung folgt

$$\frac{m}{m(B_k)} \chi = m_k$$

für Zylinder in $\Omega_a(t_k)$, also auch für alle meßbare Mengen.

Lemma 4.4 : Sei $a(t)$ der K^* -Punkt zur K^* -Abbildung t und r_k die Länge von $t(k)$. Wir setzen

$$u^* = \inf \{k \in \Gamma^+ U(0) : r_i \text{ ungerade für alle } i > k \}.$$

Es gelte: $u^* = \infty$ oder $(\Omega_a(t_{u^*}), m_{u^*}, T^2)$ ist ergodisch.

Dann hat T auf M^{-1} (bzgl. $\Omega_a(t)$) kontinuierliches Spektrum.

Beweis: Dieses Lemma stellt die Verallgemeinerung von Lemma II.3.3 dar. Wir haben schon oben gesehen daß M^{-1} entweder keine Eigenfunktionen enthält oder eine Funktion g mit

$$gT = e^{2\pi i/2n_k} g$$

enthält. Aus $u^* > k$ folgt nun einen Widerspruch, denn in diesem Fall gäbe es ein $j > k$ mit r_j gerade; daraus folgt

$$e^{2\pi i/n_j} = e^{2\pi i/n_k r_{k+1} \dots r_j} \in \text{Spektrum von } M^1,$$

also

$$(e^{2\pi i/n_j})^{r_{k+1} \dots r_{j-1} r_j/2} = e^{2\pi i/2n_k} \in \text{Spektrum von } M^1.$$

Dies impliziert daß die Multiplizität des Eigenwertes

$e^{2\pi i/2n_j}$ mindestens 2 ist, welches nicht mit der Ergodizität von T auf $\Omega_a(t)$ vereinbar ist.

Ist nun $u^* \leq k$, so können wir durch geeignete Wahl von g erreichen daß $u^* = k$ gilt, denn in diesem Fall gilt

$$n_k = r_k r_{k-1} \dots r_{u^*+1} n_{u^*} ,$$

wobei alle r_j ($u^* < j \leq k$) ungerade sind. Bilden wir

$$r = \prod_{u^* < j \leq k} r_j$$

und

$$g^* = g^r ,$$

so ist (da r ungerade ist)

$$g^* \in M^{-1}$$

und

$$g^* T = (g T)^r = e^{2\pi i r / 2n_k} g^r = e^{2\pi i / 2n_{u^*}} g^* .$$

Wegen Lemma 4.3 folgt aus unseren Voraussetzungen daß

$T^{2n_{u^*}}$ auf B_{u^*} ergodisch ist. Sei f^* die Restriktion von

g^* auf B_{u^*} . Wegen

$$g^* T = e^{2\pi i / 2n_{u^*}} g^*$$

folgt

$$f^* T^{2n_{u^*}} = f^* ,$$

also $f^* = \text{const.}$ wegen der Ergodizität von $T^{2n_{u^*}}$. Ist

aber g^* auf B_{u^*} konstant, so ist g^* auf $B_{u^*} T^{-j}$ für

$0 \leq j < n_{u^*}$ nach Lemma 4.1 konstant, also

$$g^* \in M^1 .$$

Aus

$$g^* \in M^{-1}$$

folgt nun

$$g^* = 0 .$$

Widerspruch! Damit ist Lemma 4.4 bewiesen.

Bemerkung: Um Satz 2.4c) zu beweisen müssen wir nun nur für gewisse Abbildungen t von Γ^+ in E die Ergodizität von T^2 auf $\Omega_a(t)$ beweisen, und zwar für die t , die die

folgenden Bedingungen genügen:

1. $a(t)$ ist ein K^* -Punkt für irgendeine Gruppe K^* .

2. Die Länge von $t(k)$ ist für alle $k \in \Gamma^+$ ungerade.

Dies geschieht nach dem in den Lemmata II.3.4, II.3.5, II.3.6, II.3.7 gegebenen Vorbild. Für die Lemmata II.3.4, II.3.6 und II.3.7 braucht man nur überall z^k durch n_k zu ersetzen und die Beweise entsprechend hinzuschreiben.

Lemma 4.5 : Sei $a(t)$ ein K^* -Punkt mit $t(k)$ ungerade für alle $k \in \Gamma^+$, und $C = (O)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g.C.\lim \xi(C, a) &= g.C.\lim \xi(C, aT) = \\ &= g.C.\lim \xi(\tilde{C}, a) = g.C.\lim \xi(\tilde{C}, aT) = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Beweis: Wir setzen wie im Lemma II.3.5

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= \text{relative Häufigkeit von Nullen an den} \\ &\quad \text{ungeraden Stellen in } a(1, n_k) \\ &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_4^{(k)} &= \text{relative Häufigkeit von Einsen an den} \\ &\quad \text{geraden Stellen in } a(1, n_k) . \end{aligned}$$

Setzen wir für die Ausdrücke in (11)

$$\begin{aligned} d_1(k) &= H_0^u(t(k)) & d_2(k) &= E_1^u(t(k)) \\ d_3(k) &= H_0^g(t(k)) & d_4(k) &= H_1^g(t(k)) , \end{aligned}$$

und

$$D(k) = \begin{bmatrix} d_1(k) & d_2(k) & d_3(k) & d_4(k) \\ d_2(k) & d_1(k) & d_4(k) & d_3(k) \\ d_3(k) & d_4(k) & d_1(k) & d_2(k) \\ d_4(k) & d_3(k) & d_2(k) & d_1(k) \end{bmatrix} ,$$

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ x_4^{(k)} \end{bmatrix},$$

so bekommen wir auf Grund der Definition von $a(t)$

$$x_i^{(1)} = d_i(1) \quad (i = 1, \dots, 4)$$

und

$$x^{(k+1)} = D(k+1)x^{(k)} \quad (k \in \Gamma^+).$$

Sei nun $\delta > 0$ und a, b, c, d reelle Zahlen mit

$$\delta \leq \min \{a, b, c, d\}$$

und

$$a + b + c + d = 1.$$

Rechnet man die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$$

aus, so bekommt man

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = a + b - (c + d)$$

$$\lambda_3 = a + d - (b + c)$$

$$\lambda_4 = a + c - (b + d),$$

und es folgt

$$|\lambda_i| \leq 1 - 4\delta \quad (i = 2, 3, 4).$$

Stellt man die zugehörigen Eigenvektoren auf, so bekommt man

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

und wir stellen fest daß die Eigenvektoren von der Wahl der Werte a, b, c, d unabhängig sind. Sei p_i die Projektion auf dem Eigenraum $\{e_i\}$ ($i=1, \dots, 4$), und $\lambda_i^{(k)}$ ($i=1, \dots, 4$) die Eigenwerte von $D(k)$ ($k \in \Gamma^+$). Da $D(k)$ eine Matrix des obigen Typus darstellt, haben wir

$$\lambda_1^{(k)} = 1 \quad (k \in \Gamma^+)$$

$$|\lambda_i^{(k)}| \leq 1-4\delta \quad (k \in \Gamma^+, i=2,3,4).$$

Nun schätzen wir $x^{(k+1)}$ wie folgt ab:

$$x^{(k+1)} = D(k+1)x^{(k)} = D(k+1)D(k)\dots D(2)x^{(1)},$$

also

$$p_i x^{(k+1)} = \lambda_i^{(k+1)} \lambda_i^{(k)} \dots \lambda_i^{(2)} [p_i x^{(1)}].$$

Für $i = 2, 3, 4$ gilt dann

$$p_i x^{(k+1)} \leq (1-4\delta)^k p_i x^{(1)},$$

also

$$\lim_k p_i x^{(k)} = 0 \quad (i = 2, 3, 4).$$

Für $i = 1$ ist

$$p_1 x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

und

$$p_1 x^{(k+1)} = \lambda_1^{(k+1)} \dots \lambda_1^{(2)} p_1 x^{(1)} = p_1 x^{(1)}.$$

Es folgt also

$$\lim_k x_i^{(k)} = \frac{1}{4} \quad (i = 1, \dots, 4).$$

Offenbar folgt nun Lemma 4.5 genau wie Lemma II.3.5.

Damit ist Satz 2.4 vollständig bewiesen.

Bemerkung: Offenbar würde es in Definition 2.2 hinreichen wenn wir nur forderten, daß drei der vier Größen H_0^u , H_1^u , H_0^g , $H_1^g \geq \delta$ sind, denn daraus folgt schon

$$|\lambda_i| \leq 1-2\delta \quad (i = 2, 3, 4).$$

§5. Beispiele

1. Sei

$$t(k) = (001) \quad (k \in \Gamma^+).$$

Dann haben wir

$$H_0^u(t(k)) = H_1^u(t(k)) = H_0^g(t(k)) = \frac{1}{3},$$

$$H_1^g(t(k)) = 0.$$

Aus der obigen Bemerkung folgt, daß $a(t)$ ein K^* -Punkt ist, wobei

$$K^* = \{ \lambda : \lambda^{3^k} = 1 \text{ für ein } k \in \Gamma^+ \}.$$

Dies ist gerade das in Kapitel II behandelte Beispiel.

2. Für $n \geq 3$ definieren wir

$$b^*(n) = (b_1^*, \dots, b_n^*)$$

mit

$$b_i^* = 0 \quad (1 \leq i \leq [n+2/2])$$

$$b_i^* = 1 \quad ([n+2/2] < i \leq n).$$

Ist K^* eine beliebige ordnungsfinite unendliche Untergruppe von K , so kann man nach Lemma 1.1 natürliche Zahlen $n_1, n_2, \dots$ finden derart, daß

$$3 \leq n_1 < n_2 < \dots$$

und

$$K^* = \{ e^{2\pi i j / n_k} : k \in \Gamma^+, 0 \leq j < n_k \}.$$

Durch Übergang zu einer Teilfolge kann man auch

$$r_{k+1} = \frac{n_{k+1}}{n_k} \geq 3$$

erreichen. Setzt man nun

$$t(k) = b^*(r_k) \quad (k \in \Gamma^+),$$

so ist es leicht zu sehen, daß $a(t)$ ein K^* -Punkt ist.

Nach den Sätzen 2.3 und 2.4 ist unser in der Einleitung gegebenes Versprechen nunmehr erfüllt. Es gilt sogar

mehr: Ist K^* in der Form $\{k_1, k_2, \dots\}$ gegeben, so kann man einen K^* -Punkt $a(t)$ Schritt für Schritt (d.h. in einem gewissen Sinne rekursiv) konstruieren. Man nimmt die ersten N_{k_1} , bestimmt die von denen erzeugte zyklische Gruppe und deren Ordnung n_1 . Dann wählt man ein $t(1)$ von der Länge n_1 , die die Eigenschaften von Definition 2.2 genügt (z.B. $b^*(n_1)$). Im nächsten Schritt nimmt man eine weitere Anzahl von k_1 , etwa bis zu $N_2 > N$, bestimmt die Ordnung n_2 der entsprechenden Gruppe, und wählt $t(2)$ mit der Länge $r_2 = n_2/n_1$. Damit ist der Abschnitt

$$a(-n_2+1, 2n_2)$$

von $a(t)$ festgelegt, u.s.w.

3. Das Beispiel von Kakutani kann man in dieser allgemeinen Theorie nicht unterbringen, weil Punkt 3 der Definition 2.2 nicht erfüllt werden kann. Wenn man andererseits Punkt 3 aus der Definition wegläßt, so kann man nicht sicher sein, daß das Punktspektrum des konstruierten Punktes mit K^* übereinstimmt, z.B.:

Man setze

$$t(k) = (010) \quad (k \in \Gamma^+).$$

Mit diesem t bekommt man

$$a(t) = (...010101010...),$$

also einen Punkt mit Periode 2!! Der Beweis für die strikte Ergodizität von $\Omega_{a(t)}$ bleibt aber richtig.

Literaturverzeichnis

- [1] Gottschalk, W.H.: Almost periodic points with respect to transformation semi-groups, Ann. of Math. 47(1946), 762-766.

- [2] Jacobs, K.: Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie, Erg. d. Math. Heft 29(1960).

- [3] Kakutani, S.: Ergodic Theory of Shift Transformations, Proc. V Berkeley Symp. (1966).

- [4] Oxtoby, J.C.: Ergodic Sets, Bull. Amer. Math. Soc. 58(1952), 116-136.

Lebenslauf

Als Sohn des Ingenieurs Sylvester John Keane und seine Ehefrau Grace geb. Beck wurde ich in San Antonio, Texas, am 2.1.1940 geboren. Von September 1945 bis Juni 1956 besuchte ich die Schule in San Antonio und bekam im Juni 1956 das High School Diploma. Im September 1956 immatrikulierte ich mich an der University of Texas in Austin. Nach einem fünfjährigen Studium, von dem ich jeweils ein Semester an der St. Marys University in San Antonio und an dem San Antonio College verbrachte, erwarb ich an der University of Texas im Juni 1961 den Grad des Bachelor of Arts in Mathematics. Danach arbeitete ich anderthalb Jahre für eine private Forschungsgesellschaft, die Texas Research Associates in Austin. Im September 1962 kam ich nach Deutschland um an der Georg-August-Universität in Göttingen Mathematik und Physik zu studieren; dort legte ich am 24.6.1965 das Diplomexamen in Mathematik ab. Am 15.8.63 heiratete ich die Holländerin Hermina Hendrika van't Spijker. Wir haben ein Kind. Seit dem 1.9.1965 bin ich als Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg tätig.

Erlangen, Dezember 1966

Offsetdruck - Fotodruck

-J. Hög l, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Telefon 22990 -